

Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
CLASA a VII-a

Subiectul 1.

Se consideră numerele $B = \overbrace{b000\dots 0b}^{2n+1 \text{ ori}}$. Demonstrați că $\sqrt{B}$ este număr irațional.

Subiectul 2.

Fie $a_1, a_2, \dots, a_7$ șapte numere naturale pătrate perfecte distincte. Arătați că există două dintre ele a căror diferență este multiplu de 20.

Subiectul 3.

Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \parallel CD, AB > CD$. Notăm cu O punctul de intersecție al diagonalelor trapezului și M, N, P respectiv mijloacele segmentelor $[OC], [OB]$ și $[AD]$. Știind că $PM = MN$, aflați măsurile unghiurilor $\triangle PMN$.

Subiectul 4.

Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$ și E, F, M, N, P, R mijloacele segmentelor $[AB], [BC], [CD], [DA], [AC]$, respectiv $[BD]$. Demonstrați că :

a) dreptele ME, NF, PR sunt concurente.

b) $ON + OF = \frac{AD + BC}{2} \Leftrightarrow OE + OM = \frac{AB + CD}{2}$.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!

**Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
BAREM DE CORECTARE CLASA A VII-A**

Subiectul 1.

Se consideră numerele $B = \overbrace{b000\dots0}^{2n+1 \text{ ori}} b$. Demonstrați că $\sqrt{B}$ este număr irațional.

Soluție :

Dacă $b \in \{2, 3, 7, 8\}$ evident $\sqrt{B}$ este număr irațional, deoarece B nu este pătrat perfect....**1p**

Dacă $b = 5$, atunci $B = \overbrace{5000\dots0}^{2n+1 \text{ ori}} 5$ este divizibil cu 5, dar nu este divizibil cu 25 ; în concluzie nu este pătrat perfect, de unde $\sqrt{B}$ este număr irațional.....**2p**

Dacă $b = 6$, atunci $B = \overbrace{6000\dots0}^{2n+1 \text{ ori}} 6$ este divizibil cu 3, dar nu este divizibil cu 9 ; în concluzie nu este pătrat perfect, de unde $\sqrt{B}$ este irațional.....**2p**

Pentru $b \in \{1, 4, 9\}$ putem scrie $B = \overbrace{b000\dots0}^{2n+1 \text{ ori}} b = b \cdot \overbrace{1000\dots0}^{2n+1 \text{ ori}} 1$. Vom arăta că $p = \overbrace{1000\dots0}^{2n+1 \text{ ori}} 1$ nu este pătrat perfect. Avem $(10^{n+1})^2 < \overbrace{1000\dots0}^{2n+1 \text{ ori}} 1 = 10^{2n+2} + 1 < (10^{n+1} + 1)^2$, ceea ce arată că p nu este pătrat perfect, deci $\sqrt{p}$ este număr irațional și atunci $\sqrt{B}$ este număr irațional.....**2p**

Subiectul 2.

Fie $a_1, a_2, \dots, a_7$ șapte numere naturale pătrate perfecte distincte. Arătați că există două dintre ele a căror diferență este multiplu de 20.

Soluție:

Ultima cifră a unui număr natural pătrat perfect aparține mulțimii $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Conform principiului cutiei, există cel puțin două dintre cele șapte numere cu aceeași ultimă cifră, fie acestea a_m și $a_n, a_m > a_n$ **2p**

Dacă $a_m = p^2, a_n = q^2, p, q \in \mathbb{N} \Rightarrow a_m - a_n = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$ **1p**

Cum ultima cifră a lui $a_m - a_n$ este 0, rezultă $5 | (a_m - a_n)$ **1p**

Dar p și q au aceeași paritate $\Rightarrow p - q : 2$ și $p + q : 2 \Rightarrow 4 | (a_m - a_n)$ **2p**

Cum $(4, 5) = 1 \Rightarrow 20 | (a_m - a_n)$ **1p**



60 de ani

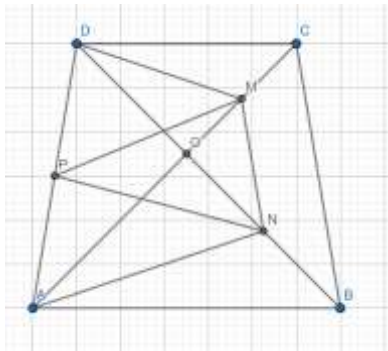
Colegiul Național
„Vasile Lucaciu”

Subiectul 3.

Fie $ABCD$ un trapez isoscel cu $AB \parallel CD, AB > CD$. Notăm cu O punctul de intersecție al diagonalelor trapezului și M, N, P respectiv mijloacele segmentelor $[OC], [OB]$ și $[AD]$. Știind că $PM = MN$, aflați măsurile unghiurilor $\triangle PMN$.

Soluție :

$$[MN] \text{ este linie mijlocie în } \triangle BOC \Rightarrow MN = \frac{BC}{2} \Rightarrow MN = \frac{AD}{2} \Rightarrow PM = \frac{AD}{2}$$



Din reciproca teoremei medianei rezultă că $\triangle DMA$ este dreptunghic în M**2p**

În $\triangle DOC$, $[DM]$ este înălțime și mediană, rezultă $\triangle DOC$ este isoscel de bază $[OC] \Rightarrow DO = DC$.

Dar $ABCD$ este trapez isoscel $\Rightarrow DO = OC \Rightarrow DO = OC = DC \Rightarrow \triangle DOC$ este echilateral.....**2p**

Deci $\angle AOB = \angle DOC = 60^\circ$ (opuse la vârf) și $\angle DCO = \angle OAB = 60^\circ$ (alterne interne) $\Rightarrow \triangle AOB$ este echilateral $\Rightarrow AN$ este mediană și înălțime $\Rightarrow \triangle AND$ este dreptunghic în N , $[PN]$ este mediană

$$\Rightarrow PN = \frac{AD}{2} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

$\Rightarrow PM = PN = MN \Rightarrow \triangle PMN$ este echilateral, deci toate unghiurile $\triangle PMN$ sunt de 60° **1p**

Subiectul 4.

Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$ și E, F, M, N, P, R mijloacele segmentelor $[AB], [BC], [CD], [DA], [AC]$, respectiv $[BD]$. Demonstrați că :

a) dreptele ME, NF, PR sunt concurente.

$$\text{b) } ON + OF = \frac{AD + BC}{2} \Leftrightarrow OE + OM = \frac{AB + CD}{2}.$$

Soluție :

$$\text{a) } [EF] \text{ este linie mijlocie în } \triangle ABC \Rightarrow EF \parallel AC, EF = \frac{AC}{2}. \quad (1)$$

$$[MN] \text{ este linie mijlocie în } \triangle ADC \Rightarrow MN \parallel AC, MN = \frac{AC}{2}. \quad (2)$$

Din (1), (2) $\Rightarrow EF \parallel MN, MN = EF$, deci $EFMN$ este paralelogram.

Dacă notăm cu $\{Q\} = EM \cap NF$, avem că punctul Q este mijlocul lui $[FN]$**1p**



Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poștal 430282

Telefon și fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630

Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

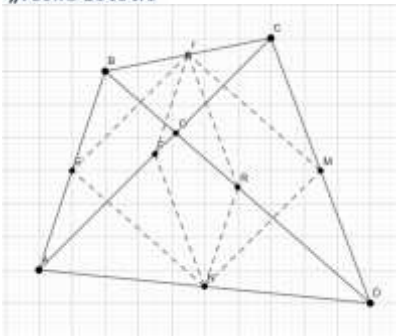


60 de ani



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Colegiul Național
„Vasile Lucaciu”



Analog se demonstrează că $FPNR$ este paralelogram, rezultă că Q este mijlocul lui $[FN]$ și mijlocul diagonalei PR1p

Deci $EM \cap NF \cap PR = \{Q\}$ 1p

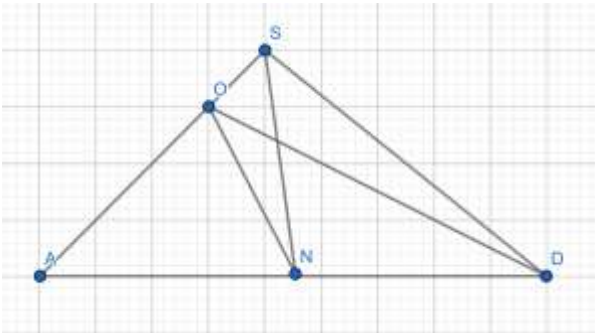
b) Vom demonstra că $ON + OF = \frac{AD + BC}{2} \Leftrightarrow AC \perp BD$.(1)

„ $\Leftarrow$ ” Dacă $AC \perp BD$, avem că $[ON]$ și $[OF]$ sunt mediane în $\triangle AOD$ și $\triangle BOC$ dreptunghice, deci

$$ON = \frac{AD}{2}, OF = \frac{BC}{2} \Rightarrow ON + OF = \frac{AD + BC}{2} \text{2p}$$

„ $\Rightarrow$ ” Presupunem că $AC \not\perp BD$ și avem cazurile:

1) $m(\angle AOD) > 90^\circ$.



Fie $DS \perp AO$.

$[SN]$ este mediană în $\triangle ASD$ dreptunghic $\Rightarrow SN = \frac{AD}{2} = AN = ND \Rightarrow \triangle NSA$ este isoscel $\angle NSA = \angle SAN$.

$\angle SON$ este exterior $\triangle AON \Rightarrow \angle SON > \angle OAN = \angle OSN \Rightarrow SN > ON \Rightarrow \frac{AD}{2} > ON$.

Analog $\frac{BC}{2} > OF$, deci $ON + OF < \frac{AD + BC}{2}$, fals.....1p

2) $m(\angle AOD) < 90^\circ$.



Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poștal 430282

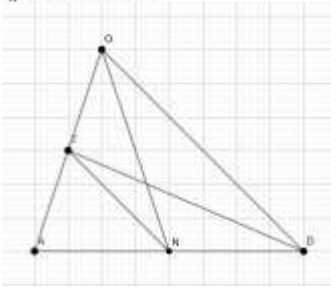
Telefon și fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630

Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro



60 de ani

Colegiul Național
„Vasile Lucaciu”



Fie $DT \perp AO$.

$[TN]$ este mediană în $\triangle ATD$ dreptunghic $\Rightarrow TN = \frac{AD}{2}$

În $\triangle OTN$, $\angle OTN$ este obtuz $\Rightarrow ON > TN = \frac{AD}{2}$.

Analog $OF > \frac{BC}{2}$, deci $ON + OF > \frac{AD + BC}{2}$, fals.....1p

Analog se demonstrează că $OE + OM = \frac{AB + CD}{2} \Leftrightarrow AC \perp BD$. (2).

Din (1) și (2) rezultă concluzia.



MINISTERUL EDUCAȚIEI

